UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
PREPARADURIA DE MATEMATICAS
MATEMATICAS 4 (MA-2115)
Miguel Guzmán (magt_123@hotmail.com)

EJERCICIOS ADICIONALES.

Tema: SUCESIONES

1.- Considere la sucesión establecida por la relación

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} \;\; ; \;\; a_1 = 1$$

Estudiar si es acotado o no.

Solución. Datos tenemos que $a_1 = 1$, observamos los términos siguientes

$$a_2 = \frac{1}{2} \; ; \; a_3 = \frac{1}{4} \; ; \; a_4 = \frac{1}{8} \ldots$$

Podemos pensar que la cota para la sucesión seria 1. Probemos por inducción

$$a_n < 1 \; ; \; a_{n+1} = \frac{a_n}{2} < 1 \;\; ; \;\; a_2 = \frac{1}{2} < 1 \;\; ; \;\; a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Entonces la sucesión si está acotada.

2.- Estudiar si la sucesión es creciente

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$$

Solución. Observamos los primeros términos de la sucesión

$$a_1 = 0; \; a_2 = \frac{2}{2}; \; a_3 = 0; \; a_4 = \frac{2}{4} \; ; \; a_5 = 0; \; a_6 = \frac{2}{6}; \ldots$$

Observamos que para números impares la sucesión es 0 y para números pares se puede escribir como $a_{2n} = \frac{1}{n}$. Entonces la sucesión no es creciente ni decreciente.

3.- Establezca para que valores de x la sucesión

$$a_n = x^n$$

Es monótona.

Solución. Observamos para números negativos ($x < 0$), la sucesión cambia de signo para n par o impar. Entonces no hay monotonía.

Para $x = 0$ la sucesión es constante a 0.

Para $x > 0$, estudiamos la monotonía (creciente)

$$a_{n+1} > a_n \quad => \quad x^{n+1} > x^n \quad => \quad x^n x > x^n \quad => \quad x > 1$$

Por lo cual se concluye que la función será monótona creciente para $x > 1$ y caso contrario

$$a_{n+1} < a_n \quad => \quad x^{n+1} < x^n \quad => \quad x^n x < x^n \quad => \quad x < 1$$

Es monótona decreciente para $x < 1$.

Para $x = 1$ es monótona ya que es constante e igual 1.

4.- Demuestre que la sucesión

$$a_n = \frac{n + (-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$$

Es acotada pero no es monótona.

Solución. Observamos los primeros términos de la sucesión.

$$a_1 = 0 \, ; a_2 = 3 \, ; \; a_3 = \frac{1}{2} \, ; \; a_4 = \frac{5}{3} \, ; \; a_5 = \frac{2}{3} \, ; \; a_6 = \frac{7}{5} ; \ldots$$

Podemos concluir que para números pares es mayor que 1 y para números impares es menor que 1. Veamos

$$a_{2n} = \frac{2n + (-1)^{2n}}{2n + (-1)^{2n+1}} = \frac{2n + ((-1)^2)^n}{2n + (-1)((-1)^2)^n} = \frac{2n + 1}{2n - 1} = 1 + \frac{2}{2n - 1} \quad => \quad a_{2n} > 1$$

$$a_{2n+1} = \frac{\left((2n + 1) + (-1)^{2n+1}\right)}{2n + 1 + (-1)^{2n+2}} = \frac{2n}{2n + 2} = 1 - \frac{2}{2n + 2} \quad => \quad a_{2n+1} < 1$$

Entonces comprobamos lo que se sospechaba, por lo tanto no es monótona.

Veamos si es acotada. Para los pares.

$$a_{2n} = 1 + \frac{2}{2n - 1} \; ; \; \text{ como } n > 1 \; => \; 2n - 1 > 1 \text{ y luego } \; a_{2n} \leq 1 + 2 => \; a_{2n} \leq 3$$

Para los impares.

$$a_{2n+1} = 1 - \frac{2}{2n+2} < 1$$

Luego concluimos que la sucesion es acotada a 3.

5.- Compruebe que

$$a_n = \frac{2^n}{n!}$$

Es acotada.

Solución. Observamos los primeros términos y podemos suponer que es decreciente veamos,

$$a_{n+1} < a_n \quad => \quad \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{2^n}{n!} \;=>\; \frac{2^n 2}{(n+1)n!} < \frac{2^n}{n!} \;=>\; \frac{2}{n+1} < 1 \;=>\; 2 < n+1$$

$$n > 1$$

Lo cual es cierto por lo tanto la sucesión es decreciente. Es acotada por 0 inferiormente y la cota superior será 2.

6.- Determine el límite de la sucesión

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right)$$

Solución. Debemos tener en cuenta $\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right)$ es continua para $(a_n \neq 0)$

$$l = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{3}{\lim_{n\to\infty} a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(l + \frac{3}{l}\right)$$

$$2l^2 = l^2 + 3 \quad => \quad l^2 = 3 \quad => \quad l = \sqrt{3}$$

7.- Determine la convergencia/divergencia de las sucesiones siguientes.

a.- $a_1 = \sqrt{2}\,;\ \ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

b.- $a_1 = 1\ \ ;\ \ a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$

$c. - a_1 = 1\ \ ;\ \ a_{n+1} = \dfrac{4 + 3a_n}{3 + 2a_n}$

$d. -\ a_1 = 2\ ;\ \ a_{n+1} = \dfrac{1}{4}(a_n^2 + 3)$

$e. - \left\{\dfrac{\cos(n^2 + 1)}{n}\right\}$

$f. - \left\{\left(\dfrac{n + 1}{2n + 1}\right)^2\right\}$

$g. - \{\sqrt[n]{n}\}\qquad sug\!:\ 1 \le \sqrt[n]{n} \le \dfrac{n - 2 + 2\sqrt{n}}{n}$

$h. - \{\sqrt[n]{n + 3} - \sqrt[n]{n}\}$

8.- Se define $\{a\}, \{b\}$ como

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\ \ ;\ \ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}\ \ \ ;\ \ a_1 = 2\ ;\ b_1 = 1$$

$$\text{y suponga}\ \ a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$$

Pruebe que convergen (demuestre por inducción la suposición) y tienen el mismo límite.

Solución.

Para el primer término. $a_2 = \frac{3}{2}\ ;\ b_2 = \sqrt{2}$, se cumple $2 > \frac{3}{2} > \sqrt{2} > 1$

Ahora se debe demostrar para $n + 1$, es decir $a_{n+1} > a_{n+2} > b_{n+2} > b_{n+1}$

Lo realizamos por partes.

$$(1)\quad a_{n+2} > b_{n+2} \Rightarrow\ (a_{n+2} - b_{n+2}) > 0\ \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} - \sqrt{(a_{n+1})(b_{n+1})}\right) = \frac{1}{2}\left(a_{n+1} - 2\sqrt{a_{n+1}b_{n+1}} + b_{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}}\right)^2 > 0$$

Verificada la primera desigualdad.

$$(2)\ \ a_{n+1} > a_{n+2}\ \Rightarrow\ \ a_{n+1} - a_{n+2} > 0$$

$$a_{n+1} - \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - b_{n+1}) > 0$$

Verificada segunda desigualdad, por último

$$(\mathbf{3})\ b_{n+2} > b_{n+1}\ \Rightarrow\ (b_{n+2} - b_{n+1}) > 0$$

$$\sqrt{a_{n+1}b_{n+1}} - b_{n+1} = \sqrt{b_{n+1}}\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}}\right) > 0$$

Verificada la tercera desigualdad luego, por inducción

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$$

Es verdadero. Concluimos que la funciones son monótonas y ambas convergen

Para el límite, suponemos que, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$; $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$

Luego

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + b_n) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\right) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$2\alpha = \alpha + \beta \quad => \quad \alpha = \beta$$

Por otro lado

$$\beta = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n b_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n * \lim_{n\to\infty} b_n} = \sqrt{\alpha\beta}$$

$$\beta^2 = \alpha\beta \quad => \quad \beta(\beta - \alpha) = 0 \quad => \begin{cases} \beta = 0 \\ \beta = \alpha \end{cases}$$

Tema: SERIE

9.- Pruebe la convergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2^n}$$

Solución.

Probemos que es convergente, cuando $n \to \infty$ observamos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad y \quad ademas \quad \lim_{n\to\infty} 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

Probamos con comparación al límite con $b_n = \frac{1}{2^n}$ Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = e$$

Luego tienen el mismo comportamiento, y como b_n es serie geométrica con $r = \frac{1}{2}$ converge luego la serie problema CONVERGE.

10.- Estudie la convergencia o la divergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n^2}$$

Solución, por comparación tenemos que $0 < |\sin(n)| < 1$, asi que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

La serie nueva es la serie p con $p = 2$ converge y por comparación la serie problema CONVERGE.

11.- Para las siguientes series, calcular

a.- La suma de los cuatro primeros términos.

b.- El error cometido al aproximar la serie por la suma de estos 4 primeros términos.

C.-Cuantos términos se tienen que sumar si queremos un error menor a 0,01.

$$a. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \qquad\qquad b. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$$

Solución.

a.- Veamos si cumple las condiciones para el criterio de la integral. Sea $f(x) = \frac{1}{x^3}$ es continua para $x > 0$, y positiva, veamos la primera derivada $f(x) = -\frac{3}{x^4}$ es siempre negativa por lo cual es siempre decreciente.

Tenemos que $S_4 = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} = 1{,}177$, el error viene por

$$Err_4 = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \int_4^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{n \to \infty} \int_4^{n} \frac{1}{x^4} dx = \lim_{n \to \infty} - \frac{1}{2x^2}\Big|_n^{\infty} = \frac{1}{32} = 0{,}03125$$

Por lo tanto $S = 1{,}17766 \pm 0{,}03125$

Para buscar el número de términos necesario para que $Err_n < 0{,}01$ entonces realizamos

$$Err_n \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2n^2} < 0{,}01 \;\; => \quad n \geq \sqrt{\frac{1}{0{,}02}} = 7{,}071 \;\; => \quad n \geq 8$$

b.- Veamos las condiciones para aplicar el criterio de la integral, observamos la primera derivada.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x} \ ; \ f'(x) = -\frac{2x + 1}{(x^2 + x)^2}$$

Entonces la función es decreciente para $x > -\frac{1}{2}$ => $x > 0$, es continua y positiva luego aplicamos el criterio de la integral.

Tenemos que para los cuatro primero términos

$$S = \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 + 2} + \frac{1}{3^2 + 3} + \frac{1}{4^2 + 4} = 0{,}8$$

Y el error viene

$$Err_4 = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} \leq \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2 + x} dx = -\ln(x + 1) + \ln(x)_4^{\infty} = \ln(5) - \ln(4) = 0{,}223$$

Por lo cual

$$S = 0{,}8 \pm 0{,}3$$

Si queremos saber el número de posiciones necesarias para que $Err_n < 0{,}01$, apliquemos la integral

$$Err_n \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2 + x} dx = \ln(x) - \ln(x + 1) = \ln\left(\frac{x}{x + 1}\right)_n^{\infty} = \ln\left(\frac{n + 1}{n}\right)$$

Y se tiene

$$\ln\left(\frac{n + 1}{n}\right) < 0{,}01 \ \ => \ \frac{n + 1}{n} < e^{0{,}01} \ \ => 1 + \frac{1}{n} < e^{0{,}01} \ \ => \ n > \frac{1}{e^{0{,}01} - 1} \ \ => n > 99{,}5$$

Entonces para $n \geq 100$, se cumple el error pedido.

12.- Calcular el valor de la serie dado con un error menor que 0,01.

$$a. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2^n} \qquad\qquad b. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n + 1)2^n}$$

Solución.

a.- Observamos que $1 + 2^n > 2^n$ y por lo tanto $\frac{1}{1+2^n} < \frac{1}{2^n}$ así se tiene

$$Err_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{i}{1 + 2^i} < \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

Imponemos que $\frac{1}{2^n} < 0{,}01$ y despejamos n. Se tiene $n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}5)} = 6{,}64$ => $n \geq 7$

Por lo cual

$$S \approx \sum_{n=1}^{7} \frac{1}{2^n + 1} = 0{,}756 = 0{,}76$$

b.- Observamos que $\frac{n}{n+1} < 1$ y por lo tanto $\frac{n}{(n+1)2^n} < \frac{1}{2^n}$ así que

$$Err_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{i}{(i+1)2^i} < \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

Por lo tanto si queremos que el error sea menor a 0,01 decimos que

$$\frac{1}{2^n} < 0{,}01 \quad => \quad n \ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln(0{,}01) \quad => \quad n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}5)} \quad => \quad n \geq 6{,}64 \quad => \quad n \geq 7$$

Así tenemos que,

$$S \approx \sum_{n=1}^{7} \frac{n}{(n+1)2^n} = 0{,}606 \quad = 0{,}61$$

13.- Determine si la serie converge. (alternante)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \cos(3n)}{n^2 + n}$$

Solución. Evaluamos la serie de valor absoluto y tenemos

$$\left|\frac{(-1)^n + \cos(3n)}{n^2 + n}\right| = \frac{|(-1)^n + \cos(3n)|}{n^2 + n} < \frac{2}{n^2 + n} < \frac{2}{n^2}$$

Luego la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \;\; ; \quad \text{serie } P = 2 \quad \textbf{CONVERGE}$$

Por comparación termino a término converge la serie problema, dado a que es la serie de valores absoluto se concluye que la serie

CONVERGE ABSOLUTAMENTE.